Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS TP, veuillez visiter :
btstp.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS TRAVAUX PUBLICS • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Production et contrôle de tubes fluorescents, durée de vie et conformité des rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btstp.fr/assets/annales/bts-tp/E2 - Mathématiques/2022/BTS TP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t) est étudiée en fonction du temps. L'exercice mobilise les équations différentielles, l'analyse de la fonction vitesse, le calcul d'une distance et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : y' + 0,8y = 0.

On utilise la formule fournie dans le sujet pour l'équation homogène $y' + ay = 0$: ses solutions sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient de y est $a = 0,8$. En remplaçant a par cette valeur, on obtient l'ensemble des solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$.
2. Dans le membre de gauche de (E), on remplace y par g : $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.
3. On retrouve le membre de droite de l'équation pour tout t. La vérification est donc établie.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

On sait que $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Si y est une autre solution, alors $y - g$ vérifie l'équation homogène (E_0), car la différence de deux solutions de (E) annule le second membre. D'après la question 1.a, cette différence s'écrit $ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$. On ajoute donc cette solution à g.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale trouvée précédemment est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$.
2. À $t = 0$, la condition initiale donne $20 = 5 + ke^0 = 5 + k$, puisque $e^0 = 1$.

3. Il vient $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction vitesse du chariot.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

La fonction étudiée est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t}$ tend vers 0, et le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers 0. Il ne reste à la limite que le terme constant de l'expression de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

1. La limite obtenue en 1.a est finie et vaut 5.
2. Par définition, si une fonction tend vers une limite finie L lorsque son argument tend vers $+\infty$, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$.
3. En prenant ici $L = 5$, on donne l'équation de l'asymptote de la courbe C.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que, pour tout t de [0 ; +∞[, f'(t) = -12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, la dérivée donnée dans l'énoncé est négative sur tout l'intervalle : f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et la limite en $+\infty$ vaut 5.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. La formule de la vitesse donne donc les résultats suivants :

- $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$, donc $f(t) > 0$ à tout instant.
- La vitesse tend vers 5 et ne s'annule jamais.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas.

Question 4.a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la dérivation d'une exponentielle composée, $\left(e^{-0,8t}\right)' = -0,8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$, ce qui est exactement l'expression de $f(t)$. Donc $F' = f$ sur l'intervalle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. La distance d parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. La distance vaut $d = \int_0^1 f(t)\,dt$. Puisque F est une primitive de f, le théorème fondamental donne $d = F(1) - F(0)$.
2. En utilisant l'expression de F, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres.
3. L'évaluation puis l'arrondi au centimètre donnent la distance demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : recopier l'unique expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro, parmi les propositions. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans le tableau du sujet, la troisième proposition est la seule qui reprend le développement limité à l'ordre 2 avec un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Son coefficient du terme en t^2, $\frac{24}{5}$, vaut $4,8$. Il faut donc recopier cette proposition, sans justification, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

1. La tangente au point d'abscisse 0 s'écrit $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$.
2. La condition initiale donne $f(0) = 20$. La dérivée fournie dans l'énoncé donne $f'(0) = -12e^0 = -12$.
3. En remplaçant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient l'équation demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Production et contrôle de tubes fluorescents, durée de vie et conformité des rivets

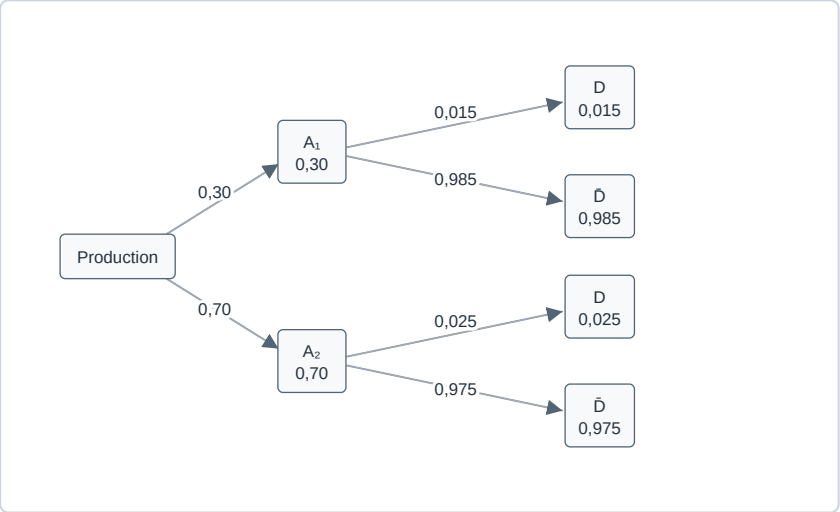
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des taux de défaut différents, et contrôle leur durée de fonctionnement. L'exercice traite aussi de l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation : provenance du tube selon l'atelier, puis présence ou absence d'un défaut.

L'arbre commence par la provenance du tube, avec les proportions de production des deux ateliers. À partir de chaque atelier, les probabilités de défaut sont conditionnelles : 0,015 pour l'atelier 1 et 0,025 pour l'atelier 2. Les probabilités d'absence de défaut sont leurs complémentaires, soit 0,985 et 0,975. Les probabilités inscrites sur les branches sont donc celles de la situation décrite dans l'énoncé.

Provenance et conformité des tubes



D : tube présentant un défaut ; D̄ : tube sans défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : A_1 (0,30), A_2 (0,70), puis D (0,015 ; 0,025) et $\bar{D}$ (0,985 ; 0,975).

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, où A_1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Le tube doit à la fois provenir de l'atelier 1 et présenter un défaut. Dans l'arbre pondéré, cette situation correspond au chemin passant par A_1 puis D. La probabilité de ce chemin est le produit de la probabilité de la première branche par celle de la branche conditionnelle suivante : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P_{A_1}(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Cette probabilité vaut 0,45 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.**

Un tube défectueux provient soit de l'atelier 1, soit de l'atelier 2. Ces deux provenances étant incompatibles, on additionne les probabilités des deux chemins menant à un défaut. On obtient $P(D) = P(A_1)P_{A_1}(D) + P(A_2)P_{A_2}(D)$. Ainsi, $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$. La probabilité totale est donc de 2,2 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant qu'un tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche la probabilité d'une provenance de l'atelier 2 sachant que le tube est sans défaut. Le numérateur est la probabilité du chemin A_2 puis $\overline{D}$, soit $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité d'absence de défaut vaut $1 - P(D) = 1 - 0{,}022 = 0{,}978$. On divise le numérateur par cette probabilité conditionnante pour obtenir $P(A_2 \mid \overline{D})$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La variable aléatoire T associe à chaque tube prélevé sa durée de bon fonctionnement en heures et suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

La page 6 indique que le paramètre de la loi exponentielle est $\lambda = 0{,}0001$ par heure. Pour une telle loi, l'espérance est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Donc $E(T) = \frac{1}{0{,}0001} = 10\,000$ heures. Cela signifie que, sur un grand nombre de tubes, la durée moyenne de bon fonctionnement est de 10 000 heures. Cette moyenne ne garantit pas la durée de vie de chaque tube.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$E(T) = 10\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule donnée pour la loi exponentielle est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. La page 6 précise $\lambda = 0{,}0001$. Pour 8 000 heures, $\lambda t = 0{,}0001 \times 8\,000 = 0{,}8$, donc $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}8} \approx 0{,}5507$. Comme la loi est continue, remplacer $T \leq 8\,000$ par $T < 8\,000$ ne change pas la probabilité.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$ à 10^{-2} près.

Question 3. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée t est $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Avec le paramètre indiqué dans le sujet, $\lambda = 0{,}0001$, et $t = 10\,000$, on obtient $\lambda t = 1$. Ainsi, $P(T > 10\,000) = e^{-1} \approx 0{,}3679$. Arrondie au centième demandé, cette probabilité vaut 0,37.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$ à 10^{-2} près.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Le sujet indique que 975 rivets conformes ont été relevés parmi 1 000 rivets. On calcule donc $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$. La proportion estimée de rivets conformes dans la production est ainsi de 0,975, soit 97,5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur f pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près.**

La formule fournie donne l'intervalle $\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \ ; \ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right]$. Avec $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$, la marge vaut $1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}} \approx 0{,}009677$. Les bornes, arrondies au millième, sont 0,965 et 0,985.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965 \ ; \ 0{,}985]$.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS TRAVAUX PUBLICS

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure 2 heures. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et la production industrielle : équations différentielles, fonctions, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution homogène ke^{-at}.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance fourni à 95 % est $f \pm 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle, trouver la solution générale avant d'appliquer la condition initiale.
- Justifier les variations par le signe de la dérivée et traiter séparément la limite en +∞.
- Dans l'arbre, distinguer les proportions des ateliers des probabilités conditionnelles de défaut.
- Respecter les arrondis demandés et indiquer les unités pour les durées et les distances.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la partie A ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Utilisez ensuite f(0) = 20 pour déterminer la constante et obtenir la fonction vitesse.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube soit défectueux ?

Multipliez, pour chaque atelier, sa proportion de production par son taux conditionnel de défaut, puis additionnez les deux résultats. Pour la probabilité conditionnelle demandée, divisez l'intersection correspondante par la probabilité de l'événement connu.

Q : Comment répartir le temps sur cette épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les exercices selon leur barème, en gardant une marge pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis demandés.

Q : Quel coefficient s'applique et quels arrondis faut-il respecter ?

Le coefficient est 2 pour les spécialités listées sur la couverture, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Les probabilités de durée sont à arrondir au centième et les bornes de l'intervalle de confiance au millième.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstp.fr/assets/annales/bts-tp/E2 - Mathématiques/2022/BTS TP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Travaux Publics : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.