Proposition de correction – BTS Mathématiques – Session 2025

En-tête

- **Session :** 2025
- **Groupement :** B
- **Code sujet :** 25MATGRB2
- **Spécialité :** Conception et industrialisation en microtechniques
- **Durée :** 2 heures
- **Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou type collège)

EXERCICE 1 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie le refroidissement d'une plaque d'aluminium. La température $f(t)$ (en °C) au bout de t minutes suit une équation différentielle, puis on exploite l'expression explicite de $f(t)$ pour répondre à des questions de modélisation et d'interprétation.

Partie A – Équation différentielle

1. Résolution de l'équation différentielle homogène

On considère l'équation : $y' + 0,25y = 0$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. On rappelle la formule fournie :

> *Équation : $y' + a\,y = 0$ → Solution : $y(t) = k\,e^{-a t}$, $k \in \mathbb{R}$*

Ici, $a = 0,25$. Donc, les solutions sont :

$$y(t) = k\,e^{-0,25 t},\ k \in \mathbb{R}$$

Point de méthode : On résout une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre en reconnaissant la forme standard et en utilisant la solution exponentielle.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif dans l'exposant ou la constante d'intégration.

---

2. Recherche d'une solution constante de l'équation complète

On cherche $g(t) = c$ solution de $y' + 0,25y = 7,5$.

- $g'(t) = 0$
- L'équation devient $0 + 0,25c = 7,5$ donc $c = 7,5 / 0,25 = 30$

$$c = 30$$

Point de méthode : Pour trouver une solution particulière constante, on pose la dérivée nulle et on

résout l’équation algébrique.
Erreur fréquente : Ne pas remplacer y' par 0 pour une fonction constante.

---

3. Ensemble des solutions de l’équation complète

L’équation y' + 0,25y = 7,5 est linéaire du premier ordre. L’ensemble des solutions est :

- Solution générale de l’homogène : k e^{-0,25 t}
- Solution particulière : 30

Donc, toute solution s’écrit :

y(t) = k e^{-0,25 t} + 30, k \in \mathbb{R}

Point de méthode : Pour une équation différentielle linéaire non homogène, la solution générale est la somme d’une solution de l’homogène et d’une particulière.
Erreur fréquente : Oublier la constante d’intégration ou la solution particulière.

---

4. Détermination de la solution particulière avec la condition initiale

On sait que f(0) = 250. On utilise la forme générale : f(t) = k e^{-0,25 t} + 30

- À t = 0 : f(0) = k + 30 = 250 donc k = 220

Donc :

f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30

Point de méthode : On utilise la condition initiale pour déterminer la constante d’intégration.
Erreur fréquente : Mauvais report de la condition initiale, ou erreur de calcul lors de la résolution pour k.

Partie B – Étude de la fonction

1. Température après un quart d’heure (15 minutes)

On cherche f(15) = 220 e^{-0,25 \times 15} + 30

- 0,25 \times 15 = 3,75
- e^{-3,75} ≈ 0,0235 (à la calculatrice)
- 220 \times 0,0235 ≈ 5,17
- f(15) ≈ 5,17 + 30 = 35,17 (arrondi à 0,1°C : 35,2°C)

Après 15 minutes, la température est d’environ **35,2°C**.

Point de méthode : Remplacer t par 15 dans l’expression de f, calculer l’exponentielle puis additionner.
Erreur fréquente : Oublier d’ajouter 30, erreur de calcul d’exponentielle ou mauvaise utilisation de la calculatrice.

---

2. Limite de f en +∞ et interprétation

$f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30$

- Quand $t \to +\infty$, $e^{-0,25 t} \to 0$
- Donc $f(t) \to 30$

Conséquence pour la courbe : $y = 30$ est une asymptote horizontale.

Interprétation : La température de la plaque se stabilise à **30°C** (température ambiante).

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 30$$

Point de méthode : La limite d'une exponentielle décroissante est 0, donc la fonction tend vers la constante ajoutée.
Erreur fréquente : Confondre la limite avec la valeur initiale ou oublier l'asymptote.

---

3. Dérivée et variations de f

On dérive : $f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30$

- $f'(t) = 220 \times (-0,25) e^{-0,25 t} = -55 e^{-0,25 t}$
- Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,25 t} > 0$, donc $f'(t) < 0$
- La fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$

Interprétation : La température de la plaque diminue constamment au cours du temps.

$f'(t) = -55 e^{-0,25 t}$
La fonction f est **strictement décroissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Point de méthode : Dérivée d'une exponentielle composée, puis étude du signe.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif ou mal appliquer la règle de dérivation.

---

4. Vérification de l'affirmation du technicien et durée pour passer sous 150°C

Le technicien affirme : « en cent secondes, la plaque a perdu cent degrés ».
Attention : 100 secondes = 1 min 40 s = 1,666... min.

- Calculons $f(0)$: $220 \times 1 + 30 = 250$
- Calculons $f(1,666...)$:
  - $0,25 \times 1,666... \approx 0,4167$
  - $e^{-0,4167} \approx 0,659$
  - $220 \times 0,659 \approx 145$
  - $f(1,666...) \approx 145 + 30 = 175$
- Perte de température : $250 - 175 = 75$ degrés

L'affirmation est donc **fausse**.

Pour trouver le temps où $f(t) < 150$:

- $f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30 < 150$
- $220 e^{-0,25 t} < 120$
- $e^{-0,25 t} < 120 / 220 = 0,5455$
- On prend le logarithme :
- $-0,25 t < \ln(0,5455) \approx -0,606$

- $t > -0,606 / 0,25 \approx -2,424$
- Mais comme l'exponentielle est strictement décroissante, on cherche le plus petit t tel que f(t) \leq 150.
- Calculons précisément :
- e^{-0,25 t} = 120 / 220 = 0,5455
- -0,25 t = \ln(0,5455) ≈ -0,606
- t = 0,606 / 0,25 = 2,424 minutes
- En secondes : 2,424 \times 60 ≈ 145,4 secondes
- Arrondi à la seconde : **145 secondes**

Le technicien a tort : en 100 secondes, la plaque perd environ 75°C.
La température passe sous 150°C au bout de **145 secondes** (arrondi à la seconde).

Point de méthode : Bien convertir les unités (minutes/secondes), isoler l'exponentielle, puis appliquer le logarithme népérien.
Erreur fréquente : Oublier la conversion des unités, ou se tromper dans la manipulation des inégalités avec le logarithme.

---

5. Croquis de la courbe représentative

La courbe de f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30 est une décroissance exponentielle partant de 250, tendant vers 30, avec une pente négative, et les points remarquables :

- f(0) = 250 (point de départ)
- f(15) ≈ 35,2 (après 15 min)
- Asymptote horizontale y = 30
- Point où f(t) = 150 : t ≈ 2,42 min

(Le croquis doit montrer la décroissance, l'asymptote, les points calculés, et indiquer la décroissance stricte.)

Point de méthode : Pour tracer une exponentielle décroissante, placer les points clés, l'asymptote, et indiquer les valeurs calculées.
Erreur fréquente : Tracer une courbe qui remonte, ou ne pas indiquer l'asymptote.

EXERCICE 2 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie un signal électrique u(t) de période \pi, défini par u(t) = t pour t \in [0 ; \pi[. On analyse ses propriétés, sa fréquence, son développement en série de Fourier, puis ses amplitudes et son spectre.

1. Calcul de quelques valeurs de u

- u(1) = 1 (car 1 ∈ [0 ; π[)
- u(π) = u(0) = 0 (par périodicité, car π ≡ 0 mod π)
- u(π + 1) = u(1) = 1 (π + 1 ≡ 1 mod π)
- u(4) = u(4 - π × 1) = u(4 - 3,14) = u(0,86) = 0,86

- u(1) = 1

- $u(\pi) = 0$
- $u(\pi + 1) = 1$
- $u(4) \approx 0{,}86$

Point de méthode : Pour une fonction périodique, ramener l'argument dans l'intervalle de définition par soustraction de multiples de la période.
Erreur fréquente : Oublier la périodicité ou mal calculer le reste.

---

2. Croquis du signal $u(t)$ sur trois périodes

Sur $[0 ; 3\pi]$, le signal est une rampe qui monte de 0 à π, puis recommence à 0, etc. (Le croquis doit montrer trois « dents de scie » identiques, de 0 à π, puis 0 à π, etc.)

Point de méthode : Représenter la fonction sur chaque période, puis recopier le motif.
Erreur fréquente : Oublier la discontinuité à chaque multiple de π.

---

3. Le signal est-il alternatif ?

Un signal est alternatif si sa valeur moyenne sur une période est nulle :

- Moyenne sur $[0 ; \pi]$: $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2} \neq 0$

Donc, **le signal n'est pas alternatif**.

Le signal $u(t)$ n'est pas alternatif.

Point de méthode : Calculer la valeur moyenne par intégration sur une période.
Erreur fréquente : Croire que toute fonction périodique est alternative.

---

4. Fréquence et pulsation du signal

- Période $T = \pi$
- Fréquence $f = 1 / T = 1 / \pi$ (en Hz)
- Pulsation $\omega = 2\pi / T = 2\pi / \pi = 2$ (en rad/s)

$f = 1 / \pi$ Hz ; $\omega = 2$ rad/s

Point de méthode : Utiliser les formules $f = 1/T$ et $\omega = 2\pi / T$.
Erreur fréquente : Inverser les formules ou oublier les unités.

---

5. Calcul des coefficients de Fourier b_n

On admet que $\int_0^{\pi} t \sin(2 n t) \, dt = -\pi / (2n)$ pour $n \geq 1$.

Formule du coefficient : $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) \, dt$

- Ici, $T = \pi$, $\omega = 2$, donc $n\omega = 2n$

- $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(2n t) dt = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n} \right) = -\frac{1}{n}$

Pour tout $n \geq 1$: $b_n = -\frac{1}{n}$

Point de méthode : Bien appliquer la formule du coefficient de Fourier, attention aux facteurs.
Erreur fréquente : Oublier de multiplier par 2 / T ou mal utiliser l'intégrale donnée.

---

6. Calcul des amplitudes A_n et remplissage du tableau

- On a $a_n = 0$ pour $n \geq 1$
- $A_0 = |a_0|$ (calculé plus haut : $a_0 = \pi / 2$)
- Pour $n \geq 1$: $A_n = |b_n| = 1 / n$

n	0	1	2	3	4
Valeur exacte de A_n	$\pi / 2$	1	1/2	1/3	1/4
Valeur approchée à 10^{-2} près	1,57	1,00	0,50	0,33	0,25

Point de méthode : Les amplitudes sont les valeurs absolues des coefficients.
Erreur fréquente : Oublier de prendre la valeur absolue ou mal arrondir.

---

7. Analyse des spectres

7.a. **Pourquoi le Spectre 2 ne peut pas être celui de $u(t)$?**
Le spectre 2 présente des amplitudes nulles pour certains n (par exemple, pour $n = 2$). Or, pour $u(t)$, tous les A_n pour $n \geq 1$ sont non nuls.

Le Spectre 2 ne peut pas être celui de $u(t)$ car il comporte des amplitudes nulles pour certains n, ce qui n'est pas le cas ici.

7.b. **Pourquoi le Spectre 3 ne peut pas être celui de $u(t)$?**
Le spectre 3 montre des amplitudes A_n qui augmentent avec n, alors que pour $u(t)$, elles décroissent comme $1/n$.

Le Spectre 3 ne peut pas être celui de $u(t)$ car les amplitudes A_n augmentent avec n, au lieu de décroître.

Point de méthode : Pour reconnaître un spectre, observer la décroissance ou la nullité des amplitudes.
Erreur fréquente : Confondre la décroissance avec la croissance, ou ne pas regarder tous les n.

Formulaire récapitulatif

- $y' + a y = 0 \rightarrow y(t) = k e^{-a t}$
- Équation différentielle linéaire du premier ordre : solution générale = solution homogène + solution particulière
- Valeur moyenne sur une période T : $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$

- Fréquence : $f = 1 / T$
- Pulsation : $\omega = 2\pi / T$
- Développement en série de Fourier :
    - $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$
    - $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$
    - $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$
    - $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- Limite d’une exponentielle décroissante : $\lim_{t \to +\infty} k e^{-a t} = 0$

Conseils généraux pour réussir l’épreuve de mathématiques en BTS

1. **Lisez attentivement chaque question** : repérez les données, les unités et les objectifs de chaque partie avant de commencer à rédiger.
2. **Justifiez chaque étape** : expliquez vos calculs, citez les formules ou théorèmes utilisés, même pour des étapes simples.
3. **Soignez les conversions d’unités** : vérifiez toujours si les temps sont en secondes ou en minutes, et adaptez vos calculs en conséquence.
4. **Encadrez les résultats finaux** : cela facilite la correction et montre que vous savez présenter une réponse claire.
5. **Relisez-vous et vérifiez vos calculs** : une erreur d’étourderie peut coûter de nombreux points, surtout sur les calculs d’exponentielles ou de logarithmes.