Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot en freinage** (12 questions) — Page 3

2. **Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique** (9 questions) — Page 7

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — Page 11

Sujet officiel (PDF) : https://btstp.fr/assets/annales/bts-tp/E2 - Mathématiques/2022/BTS TP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot en freinage

Un chariot de fête foraine, propulsé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage ; sa vitesse est modélisée par une fonction f. L'exercice étudie cette fonction au moyen d'une équation différentielle, de variations, d'une intégrale de distance, puis d'un développement limité et d'une tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont les fonctions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. On remplace donc a par cette valeur dans la formule. L'intervalle de définition est $[0 ; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En remplaçant y par g dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité est vraie pour tout t de l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Toute autre solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène $y' + 0,8y = 0$, soit $ke^{-0,8t}$. La constante k est réelle et peut prendre toute valeur.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale de (E) est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À $t = 0$, l'exponentielle vaut 1. La condition initiale impose donc $f(0) = 5 + k = 20$, d'où $k = 15$. On remplace cette constante dans la solution générale pour obtenir la fonction recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 5 + 15e^{-0,8t}$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t), lorsque t tend vers +∞, est égale à 5.

On utilise l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers +∞, le produit $-0,8t$ tend vers −∞. Or l'exponentielle tend vers zéro lorsque son exposant tend vers −∞. Ainsi, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers zéro et le terme constant demeure.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers +∞ est le nombre fini 5. La courbe représentative de f possède donc une asymptote horizontale en +∞. L'ordonnée de cette droite est égale à la limite de la fonction. On écrit l'équation de cette droite avec cette ordonnée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que $f'(t) = -12e^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$: la fonction est strictement décroissante. Elle vaut $f(0) = 20$ et tend vers 5 lorsque t tend vers +∞.

t	0	+∞
Signe de $f'(t)$	−	
Variation de f	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0 ; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Un arrêt nécessiterait que la vitesse atteigne zéro. Or $f(t) = 5 + 15e^{-0,8t}$ et l'exponentielle est strictement positive pour tout temps fini. La vitesse reste donc supérieure à 5 $m \cdot s^{-1}$. Elle se rapproche de 5 sans atteindre zéro, même lorsque le temps augmente indéfiniment.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$ et n'atteint jamais zéro.

Question 4.a. **Vérifier que $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$ est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée est $-0,8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$, ce qui correspond à $f(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **En utilisant l'intégrale de f entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, calculer la distance parcourue par le chariot, donner sa valeur exacte puis l'arrondir au centimètre.**

La distance entre 0 et 1 seconde vaut $F(1) - F(0)$. Avec $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette valeur est environ *15,325081923* m. L'arrondi au centimètre est donc *15,33* m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ m \approx 15,33\ m$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel donne le polynôme régulier $20 - 12t + (24/5)t^2$. Parmi les choix proposés, la seule écriture qui conserve ces trois termes et comporte un reste d'ordre supérieur est la troisième. En effet, pour un développement limité à l'ordre 2, le reste peut s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. La fonction vaut $f(0) = 20$, et la dérivée donnée dans la partie B donne $f'(0) = -12e^{0} = -12$. La tangente passe donc par le point $(0 ; 20)$ et a pour pente -12.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique

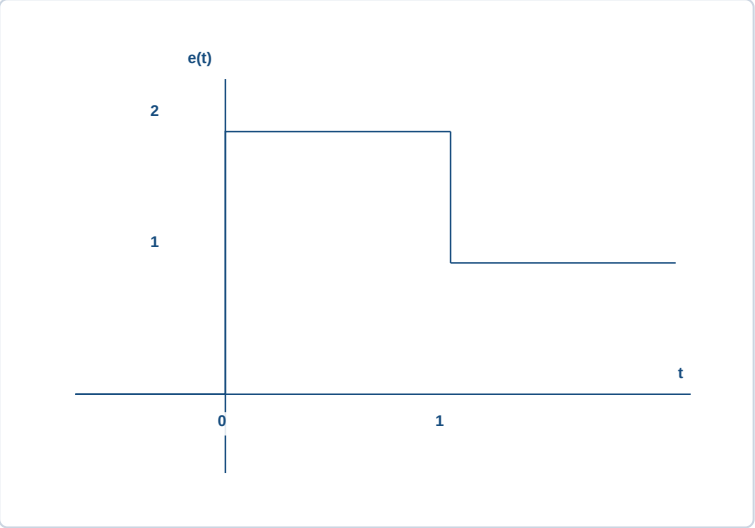
Un système électrique reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice demande de tracer et transformer le signal d'entrée, puis de déterminer le signal de sortie à l'aide des transformées de Laplace et d'en étudier la représentation et la limite.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme le signal est causal, il est nul avant 0. Puisque U(0) = 1, on a e(0) = 2. Le signal reste égal à 2 jusqu'à l'instant 1, où il prend la valeur 1, puis conserve cette valeur. Le visuel représente ces paliers et les deux instants de saut.

Signal d'entrée e(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

e(t) = 0 si t < 0, 2 si 0 ≤ t < 1, et 1 si t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité, la transformée de 2U(t) est 2/p. Le formulaire donne pour le signal retardé U(t − 1) la transformée e^{-p}/p. On soustrait cette seconde transformée de la première, conformément à e(t) = 2U(t) − U(t − 1). Cela fournit directement E(p), sans distinguer les intervalles de définition du signal.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$E(p) = (2 - e^{-p})/p$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que $S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^{-p}$.

1. La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$.
2. En remplaçant $H(p)$ et $E(p)$ par leurs expressions, puis en distribuant le facteur $1/(p + 1)$, on obtient les deux termes demandés.

Le facteur e^{-p} reste associé au terme provenant du retard d'une unité du signal d'entrée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^{-p}/[p(p + 1)]$.

Question 2. Vérifier que $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$.

Réduisons le membre de droite au même dénominateur. Son numérateur vaut $(p + 1) - p = 1$, et son dénominateur vaut $p(p + 1)$. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les deux dénominateurs sont non nuls.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de $1/p$, de $1/(p + 1)$, de e^{-p}/p et de $e^{-p}/(p + 1)$, en utilisant le formulaire.

Les deux premières transformées inverses se lisent dans le formulaire. Pour les deux dernières, on utilise la propriété de retard d'une unité : multiplier une transformée par e^{-p} revient à retarder le signal d'une unité et à le multiplier par $U(t - 1)$.

- $1/p$: $U(t)$.
- $1/(p + 1)$: $e^{-t}U(t)$.
- e^{-p}/p : $U(t - 1)$.
- $e^{-p}/(p + 1)$: $e^{-(t - 1)}U(t - 1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t - 1)$, $e^{-(t - 1)}U(t - 1)$.

Question 4. **En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition en éléments simples donne $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$. Dans S(p), le terme multiplié par e^{-p} correspond à un signal retardé qui est nul sur [0 ; 1[. Il reste donc deux fois la différence des transformées inverses $1/p$ et $1/(p + 1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$: $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$ sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

On utilise l'expression valable pour $t \geq 1$ et on remplace t par 1. Comme $e^{-1} = 1/e$, le terme exponentiel devient $(e - 2)/e$. En ajoutant 1, on obtient la forme exacte $2 - 2/e$, puis son approximation au dixième.

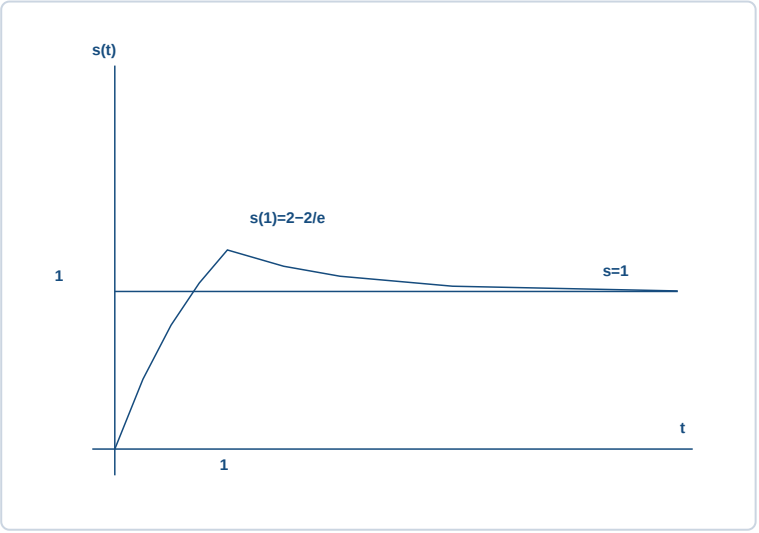
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}3$.

Question 5.b. **Compléter sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction s.**

1. Sur [0 ; 1], tracer $s(t) = 2(1 - e^{-t})$: la courbe part de (0 ; 0) et atteint $(1 ; 2 - 2/e)$.
2. À partir de t = 1, tracer $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$. Cette branche décroît et se rapproche de l'asymptote horizontale s = 1.

Les deux expressions donnent la même valeur en t = 1 ; la courbe est donc continue à cet instant.

Courbe représentative de s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe monte de 0 à $2 - 2/e$ en $t = 1$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression admise est $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$. Le coefficient $e - 2$ est constant et e^{-t} tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Le terme exponentiel disparaît donc à la limite, tandis que le terme constant reste égal à 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2022, code 22MATGRB2, durée 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, mobilisant équations différentielles, analyse de fonctions, intégration et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière permet de déterminer les solutions de l'équation avec second membre.
- Si $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, alors sa limite vaut 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = F(t_1) - F(t_0)$.
- Un retard d'une unité multiplie la transformée de Laplace par e^{-p} ; $1/(p + 1)$ est la transformée de $e^{-t}U(t)$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour une équation différentielle avec second membre, distinguer la solution homogène d'une solution particulière.
- Dans le tableau de variation, justifier le signe de f' et indiquer les valeurs ou limites aux bornes.
- Pour le développement limité d'ordre 2, conserver les termes jusqu'à t^2 et écrire le reste sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers 0.
- En transformée de Laplace, appliquer le facteur de retard aux seuls termes concernés et respecter les intervalles indiqués.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la distance parcourue à partir d'une fonction de vitesse ?

On intègre la vitesse sur l'intervalle de temps. Si F est une primitive de f, la distance entre t_0 et t_1 vaut $F(t_1) - F(t_0)$. On conserve la valeur exacte, puis on arrondit au centimètre comme demandé.

Q : Comment traiter le terme retardé dans une transformée de Laplace ?

La transformée de $f(t - a)U(t - a)$ est $F(p)e^{-ap}$. On identifie le retard a, on transforme le signal de référence f, puis on multiplie sa transformée par le facteur exponentiel correspondant.

Q : Comment organiser les deux exercices pendant les deux heures d'épreuve ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points, sur le freinage d'un chariot et un système électrique. Repérez les questions indépendantes, réservez du temps aux tracés sur le document-réponse et vérifiez les valeurs exactes et les arrondis.

Q : Quels outils et documents sont autorisés ou fournis pour l'épreuve ?

Une calculatrice avec mode examen actif ou une calculatrice sans mémoire de type collège est autorisée. Le formulaire de transformées de Laplace est fourni à la page 7 et le document-réponse doit être rendu avec la copie.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstp.fr/assets/annales/bts-tp/E2 - Mathématiques/2022/BTS TP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Travaux Publics : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.